$$\langle e_1| = \frac{\langle x_1|}{\sqrt{\langle x_1|x_1\rangle}}\, e^{-i\phi}, \quad \langle e_1|e_1\rangle = \frac{\langle x_1|x_1\rangle}{\left(\sqrt{\langle x_1|x_1\rangle}\right)^2}\, e^{i\phi} e^{-i\phi} = 1$$

3ο Μάθημα 22/10/2020

Συνέχεια...

1. Κατασκευάζω τα $\langle x_i|x_j\rangle$ με αυθαίρετη αρίθμηση.
2. Για το $|x_1\rangle$ κατασκευάζω το

$$|e_1\rangle = \frac{|x_1\rangle}{\sqrt{\langle x_1|x_1\rangle}}\, e^{i\phi}, \text{ αυθαίρετο } \phi$$

μιγαδική σταθερά

Καλή επιλογή είναι το $\phi = 0$

3. Τώρα γράφω $|e_2\rangle = N_2(|x_2\rangle + \beta_{21}|e_1\rangle)$ προσδιορίζω εις σταθερές από τα εσωτερικά γινόμενα

↳ $\langle e_1|e_2\rangle = 0$, $\langle e_1|e_1\rangle = 1$

$$\langle e_1|e_2\rangle = \langle e_1|x_2 + \beta_{21} e_1\rangle = $$
$$= \langle e_1|x_1\rangle + \beta_{21}\underbrace{\langle e_1|e_1\rangle}_{1} = 0$$

$\Leftrightarrow \langle e_1|x_2\rangle + \beta_{21} = 0$

$\Leftrightarrow \beta_{21} = -\dfrac{\langle x_1|x_2\rangle}{\sqrt{\langle x_1|x_1\rangle}}$

Πρόχειρο:

$$\langle e_1|x_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle x_1|x_1\rangle}}\langle x_1|x_2\rangle$$

$$|e_2\rangle = N_2(|x_2\rangle + \beta|e_1\rangle)$$
$$\langle e_2| = N_2(\langle x_2| + \beta^*\langle e_1|)$$

$$|e_1\rangle = \frac{|x_1\rangle}{\sqrt{\langle x_1|x_1\rangle}}$$

Επίσης $\langle e_2|e_2\rangle = |N_2|^2\left(\langle x_2|x_2\rangle + \beta_{21}\langle x_1|e_1\rangle + \right.$
$\left. + \beta_{21}^*\langle e_1|x_1\rangle + |\beta_{21}|^2\right) = 1$

4. Ομοίως για $|e_3\rangle = N_3(|x_3\rangle + \beta_{32}|e_2\rangle + \beta_{31}|e_1\rangle)$

$$\beta_{3i} = -\langle e_i|x_3\rangle, \quad i = 1, 2$$

$$N_3 = \frac{1}{\sqrt{\langle x_3|x_3\rangle - |b_{32}|^2 - |b_{31}|^2}}$$

5. Τελικά $|e_{k+1}\rangle = N_{k+1}\left(|x_{k+1}\rangle + \sum_{i=1}^{k} b_{k+1,i}|e_i\rangle\right)$

$$b_{k+1,i} = -\langle e_i|x_{k+1}\rangle$$
$$i = 1, 2, \dots, k$$

$$N_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{\langle x_{k+1}|x_{k+1}\rangle - \sum_{i=1}^{k}|b_{k+1,i}|^2}}$$

Παράδειγμα:

Να κατασκευάσετε τα πολυώνυμα $P_n(x)$ στο $[-1,1]$

Γνωρίζω ότι τα $|x_i\rangle = x^{i-1}$, $i = 1, \dots, N+1$

για $i=1$: $|x_1\rangle = x^{1-1} = x^0 = 1$

Τότε $\langle x_m|x_n\rangle = \int_{-1}^{1} x^{m-1}\, x^{n-1}\, dx = \int_{-1}^{1} x^{m+n-2}\, dx =$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{m+n-1}, & m+n \text{ περιττός} \\ 0, & m+n \text{ άρτιος} \end{cases}$$

Γενική παρατήρηση.

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\cdot P_n(x)\, dx = \frac{1}{2n+1}\delta_{mn}, \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m=n \\ 0, & m\neq n \end{cases}$$

Τότε $P_0 = |P_0\rangle = x^0 = 1$

$P_1 = x \longrightarrow \int_{-1}^{1} P_1\cdot P_1\, dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx \dots$

$P_2 = \frac{3}{2}\left(\underbrace{|x_3\rangle}_{x^3} - \frac{1}{3}\underbrace{|x_1\rangle}_{x}\right)$

$P_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

σπίτι: να βρω πως βγήκαν τα P_0, P_1, P_2, P_3

Η σχέση Parseval – Ανισότητα Bessel:

Έστω ότι σε έναν N-διάστατο χώρο S έχουμε N-ορθοκανονικά διανύσματα $|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_N\rangle$ που σχηματίζουν βάση του S. Τότε προφανώς κάθε διάνυσμα του S γράφεται ως:

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^{N} a_i |e_i\rangle$$

Ο στόχος μας είναι να προσδιορίσουμε τα a_i. Θεωρούμε το εσωτ. γινόμενο:

$$\langle e_m | x\rangle = \langle e_m | \underbrace{\sum_{i=1}^{N} a_i |e_i\rangle}_{|x\rangle}$$

$$= \langle e_m | (a_1|e_1\rangle + a_2|e_2\rangle + \dots + a_N|e_N\rangle)$$
$$= a_1\langle e_m|e_1\rangle + a_2\langle e_m|e_2\rangle + \dots + a_N\langle e_m|e_N\rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{N} a_i \langle e_m|e_i\rangle = \sum_{i=1}^{N} a_i\, \delta_{im} = a_m$$

$$\delta_{im} = \begin{cases} 0, & i \neq m \\ 1, & i = m \end{cases}$$

Ο εκάστοτε $a_i = \langle e_i|x\rangle$ και τελικά

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle e_i|x\rangle \cdot |e_i\rangle$$

Ορισμός: Αν το ορθοκανονικό σύστημα $\{|e_i\rangle, i=1,\dots,N\}$ δεν περιέχεται σε άλλο, μεγαλύτερο ορθοκανονικό σύστημα τότε καλείται πλήρες. Σε N-διάστατους χώρους ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα αποτελεί βάση.

Τότε για τα εκάστοτε διανύσματα του χώρου

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle e_i|x\rangle \cdot |e_i\rangle, \quad |y\rangle = \sum_{j=1}^{N} \langle e_j|y\rangle \cdot |e_j\rangle$$

$$\langle y|x\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle y|e_j\rangle \langle e_j| \cdot \sum_{i=1}^{N} \langle e_i|x\rangle \cdot |e_i\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} \langle y|e_j\rangle \langle e_i|x\rangle \langle e_j|e_i\rangle =$$

$$\langle e_j|e_i\rangle = \delta_{ji} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \langle e_j|y\rangle\langle e_i|x\rangle \underbrace{\langle e_j|e_i\rangle}_{=1} = \langle e_i|y\rangle\langle e_i|x\rangle \cdot 1$$

$$\int_a^b \int_c^d \underbrace{f(x,y)}_{g(x)\cdot h(y)}\, dx\, dy = \int_c^d g(x)\, dx \cdot \int_a^b h(y)\, dy$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \langle y|e_i\rangle\langle e_i|x\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle e_i|y\rangle^{*}\langle e_i|x\rangle$$

Δηλαδή $\langle y|x\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle e_i|y\rangle^{*}\langle e_i|x\rangle$

και καλείται ισότητα του Parseval.

Παρατήρηση: Αν $|x\rangle = |y\rangle$ τότε $\langle x|x\rangle = \sum_{i=1}^{N} |\langle e_i|x\rangle|^2$

Παρατήρηση: Αν το ορθοκανονικό σύστημα δεν είναι πλήρες δηλ. $\{|e_i\rangle, i=1,2,3,\dots,n\}$, $n<N$

τότε $\langle x|x\rangle \geq \sum_{i=1}^{n} |\langle e_i|x\rangle|^2$

ανισότητα Bessel

$$\langle x|x\rangle = \sum_{i=1}^{N} |\langle e_i|x\rangle|^2 = \sum_{i=1} |\langle e_i|x\rangle|^2 + \sum_{i=n+1}^{N} |\langle e_i|x\rangle|^2$$

Σχέση με την ανισότητα Schwarz

Θυμόμαστε ότι $\forall$ ζεύγος διανυσμάτων $|x\rangle$ κ $|y\rangle$ ισχύει:

$$\sqrt{\langle x|x\rangle}\cdot\sqrt{\langle y|y\rangle} \geq |\langle y|x\rangle|$$

από την ανισότητα Bessel για $n=1$ βρίσκω

$$\langle x|x\rangle \geq |\langle e_1|x\rangle|^2$$

Όμως $|e_1\rangle = \dfrac{|x\rangle}{\sqrt{\langle x|x\rangle}} = \dfrac{|y\rangle}{\sqrt{\langle y|y\rangle}}$

Δηλαδή $\langle x|x\rangle \geq |\langle e_1|x\rangle|^2 = |\langle y|x\rangle|^2 \cdot \frac{1}{(\sqrt{\langle y|y\rangle})^2}$

Τελικά:

$$\langle x|x\rangle \cdot \langle y|y\rangle \geq |\langle e_1|x\rangle|^2$$

Για ένα πλήρες σύστημα ορθοκανονικών διανυσμάτων $\{|e_i\rangle, i=1,2,\ldots,N\}$ (βάση) ισχύει

$$\langle x|e_i\rangle = 0 \Rightarrow |x\rangle = 0 \quad \text{γιατί}$$

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle e_i|x\rangle |e_i\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle x|e_i\rangle^* |e_i\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} 0\,|e_i\rangle = 0$$